SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1998-99

Andrea Pascucci

REGOLARITÀ C^∞ DELLE SOLUZIONI DI UN'EQUAZIONE ULTRAPARABOLICA NON LINEARE DELLA FINANZA MATEMATICA

11 marzo 1999

Tecnoprint - Bologna 2000

Sunto Presentiamo alcuni risultati sulla regolarità interna delle soluzioni di un'equazione differenziale non-lineare parabolica degenere che ha origine in matematica finanziaria.

Abstract In this note we present some recent results about the interior regularity of the solutions to a nonlinear degenerate parabolic equation of mathematical finance.

1 Introduzione

In questo seminario presentiamo alcuni risultati ottenuti in collaborazione con i Professori Giovanna Citti e Sergio Polidoro [4]. Ci occupiamo dello studio della regolarità interna delle soluzioni dell'equazione in $\mathbb{R}^3$

$$Lu \equiv \partial_{xx}u + u\partial_y u - \partial_t u = f, \tag{1.1}$$

dove indichiamo con $z = (x, y, t)$ il punto di $\mathbb{R}^3$. L'equazione (1.1) appare in alcuni lavori recenti di matematica finanziaria. In [12], la (1.1) descrive l'evoluzione del prezzo di certi strumenti finanziari, le opzioni, il cui valore in un determinato momento (tipicamente, la scadenza) non dipende solamente dal prezzo del pacchetto corrispondente, ma anche dalla storia del proprio prezzo. L'equazione (1.1) compare anche in un lavoro di Antonelli, Barucci e Mancino [1], dove viene proposto un modello matematico per lo studio del problema delle decisioni di un soggetto finanziario in presenza di rischio. Gli autori di [1] dimostrano, con metodi probabilistici, che il problema di Cauchy per l'equazione (1.1) con un opportuno dato iniziale u_0 tale che

$$\partial_x u_0(x, y) \neq 0, \qquad \forall (x, y). \tag{1.2}$$

ammette una soluzione nel senso di viscosità. Benchè la regolarità della soluzione del problema di Cauchy abbia importanti conseguenze nello studio del problema economico considerato, le tecniche utilizzate in [1] permettono solamente di dimostrare che la soluzione è localmente Lipschitziana.

In questo seminario consideriamo soluzioni classiche di (1.1), ossia soluzioni u di (1.1) tali che $u \in C^1$ ed esiste u_{xx} continua. Proviamo il seguente risultato.

TEOREMA 1.1 *Sia u una soluzione classica dell'equazione (1.1) in un aperto Ω di $\mathbb{R}^3$, con $f \in C^\infty(\Omega)$. Se $u_x \neq 0$ in Ω allora $u \in C^\infty(\Omega)$.*

L'ipotesi cruciale $u_x \neq 0$ assunta nel teorema è giustificata in primo luogo dalla (1.2).

Osserviamo anche che se la funzione u non dipende dalla variabile x, la (1.1) con $f = 0$ diventa l'equazione di Burgers

$$u\partial_y u - \partial_t u = 0, \tag{1.3}$$

e non si può quindi sperare di ottenere risultati di regolarità della soluzione. Infatti, è ben noto che la soluzione del problema di Cauchy relativo a (1.3) può essere discontinua anche se il dato iniziale è di classe C^∞. Per esempio, la u soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u\partial_y u - \partial_t u = 0 & , \\ u(y, 0) = \frac{1}{1+y^2} & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

è costante sulle curve integrali dell'operatore differenziale del prim'ordine in (1.3). D'altra parte, tali curve integrali sono rette che, per t abbastanza grande, si intersecano.

Per studiare le proprietà di regolarizzazione di $L_{\bar{u}}$, è opportuno introdurre una nozione di regolarità hölderiana che tenga conto della struttura omogenea naturalmente associata all'operatore. Spazi di funzioni hölderiane associati a strutture omogenee sono stati introdotti da vari autori (si veda, per esempio, [15] e [16]). Ricordiamo anche la definizione introdotta in [11] per lo studio di questioni analoghe nell'ambito della teoria dei semigruppi.

Se P è un campo vettoriale C^1 e $0 < \alpha < 1$, diciamo che la funzione u è α-hölderiana nella direzione di P in Ω (e scriviamo $u \in C_P^\alpha(\Omega)$), se esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|u(\exp(hP)(z)) - u(z)| \leq L|h|^\alpha,$$

per ogni $z \in \Omega$ e h abbastanza piccolo. Tenendo conto del diverso grado di omogeneità di X e $Y_{\bar{u}}$, definiamo

$$C_{\bar{u}}^\alpha(\Omega) = C_X^\alpha(\Omega) \cap C_{Y_{\bar{u}}}^{\overset{\alpha}{2}}(\Omega).$$

Utilizzando l'ipotesi,

$$[X, Y_{\bar{u}}] = \bar{u}_x \partial_y \neq 0,$$

come conseguenza della formula di Campbell-Hausdorff, si riconosce che la regolarità nelle direzioni di X e $Y_{\bar{u}}$ implica la regolarità (pesata) in tutte le direzioni. In particolare

$$C_{\bar{u}}^\alpha(\Omega) \subseteq C_{\partial_y}^{\overset{\alpha}{3}}(\Omega).$$

In maniera sostanzialmente analoga si definiscono gli spazi di funzioni hölderiane di ordine superiore. Diciamo che $u \in C_{\bar{u}}^{1,\alpha}(\Omega)$ se

$$Xu \in C_{\bar{u}}^\alpha(\Omega), \quad \text{e} \quad Y_{\bar{u}}u \in C_{Y_{\bar{u}}}^{\overset{1+\alpha}{2}}(\Omega).$$

Se $k \geq 2$, si può dare ricorsivamente la definizione di $C_{\bar{u}}^{k,\alpha}(\Omega)$: diciamo che $u \in C_{\bar{u}}^{k,\alpha}(\Omega)$ se

$$Xu \in C_{\bar{u}}^{k-1,\alpha}(\Omega), \quad \text{e} \quad Y_{\bar{u}}u \in C_{\bar{u}}^{k-2,\alpha}(\Omega).$$

Analogamente sono definiti gli spazi $C_{\bar{u}}^k(\Omega)$. Osserviamo che

$$C_{\bar{u}}^{3k,\alpha}(\Omega) \subseteq C^{k,\overset{\alpha}{3}}(\Omega),$$

essendo $C^{k,\alpha}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni α-hölderiane in senso usuale. Vale inoltre il seguente risultato di approssimazione locale.

PROPOSIZIONE 2.1 *Sia $k \in \mathbb{N}$ e $u \in C_{\bar{u}}^{k,\alpha}(\Omega)$. Per ogni $z_0 \in \Omega$, esiste un polinomio $P_{z_0}^k(u)$ di grado minore o uguale di k e tale che*

$$u(z) = P_{z_0}^k(u)(z) + O(d_{\bar{u}}(z_0, z)^{k+\alpha})$$

per $z \to z_0$.

In particolare, lo sviluppo al prim'ordine di $\bar{u} \in C_{\bar{u}}^{1,\alpha}(\Omega)$ di punto iniziale $z_0 \in \Omega$ è dato da

$$\bar{u}(z) = \bar{u}(z_0) + \bar{u}_x(z_0)(x - x_0) + O(d_{\bar{u}}(z_0, z)^{1+\alpha}),$$

per $z \to z_0$. Notiamo quindi che l'operatore congelato L_{z_0} non è altro che l'operatore i cui coefficienti sono gli sviluppi al primo ordine dei coefficienti di $L_{\bar{u}}$.

3 Paragrafo 3

In questo paragrafo diamo una traccia della prova del Teorema 1.1. Anzitutto studiamo la regolarità delle soluzioni dell'equazione linearizzata (1.5) sotto le medesime ipotesi del Teorema 1.1. Proviamo quindi una formula di rappresentazione per le soluzioni di (1.5).

PROPOSIZIONE 3.1 *Sia $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Per ogni $z_0 \in \Omega$, $u\varphi$ può essere rappresentata dalla seguente formula*

$$u\varphi = I_1(\cdot, z_0) + I_2(\cdot, z_0) - I(\cdot, z_0), \tag{3.1}$$

dove

$$I_1(z, z_0) = \int_\Omega \Gamma_{z_0}(z;\zeta)(u(\zeta)L_{z_0}\varphi(\zeta) + 2Xu(\zeta)X\varphi(\zeta))d\zeta,$$

$$I_2(z, z_0) = \int_\Omega \Gamma_{z_0}(z;\zeta)f(\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta,$$

$$I(z, z_0) = \int_\Omega \Gamma_{z_0}(z;\zeta)(\bar{u}(\zeta) - P^1_{z_0}\bar{u}(\zeta))\varphi(\zeta)\partial_\eta u(\zeta)d\zeta.$$

La (3.1) segue facilmente dalla classica formula di rappresentazione

$$u\varphi(z) = \int_\Omega \Gamma_{z_0}(z;\zeta)L_{z_0}(u\varphi)(\zeta)d\zeta.$$

Osserviamo che se $L_{\bar{u}}u = f$ in Ω allora $u \in C^{1,\alpha}_{\bar{u}}(\Omega)$. Infatti, fissati un compatto $K \subseteq \Omega$ e una funzione $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tale che $\varphi = 1$ in un intorno di K, dalla formula di rappresentazione (3.1) otteniamo

$$Xu(z) = \int_\Omega X(z)\Gamma_{z_0}(\cdot;\zeta)w(\zeta)d\zeta, \qquad \forall z, z_0 \in K,$$

per una certa $w \in C_0(\Omega)$. Pertanto i noti teoremi di tipo Morrey per operatori omogenei (si veda [13]; si veda anche [15],[16] per risultati analoghi) garantiscono che

$$|u_x(z) - u_x(\zeta)| \le Cd_{z_0}(z,\zeta)^\alpha, \qquad \forall z, \zeta \in K,\ \forall \alpha \in]0,1[, \tag{3.2}$$

con $C > 0$ dipendente da z_0. Per dedurre da (3.2) il risultato di regolarità occorre verificare che, nella stima di hölderianità, la costante C non dipenda dal punto z_0 ma solo dalla norma L^∞ su K dei coefficienti $\bar{u}, \bar{u}_x$. Di conseguenza, in base alla stima (2.1), da (3.2) si ricava

$$|u_x(z) - u_x(\zeta)| \le Cd_{\bar{u}}(z,\zeta)^\alpha, \qquad \forall \alpha \in]0,1[.$$

Utilizzando la formula (3.1), otteniamo poi la seguente

PROPOSIZIONE 3.2 *Sia u soluzione classica di (1.5) in Ω con $\bar{u} \in C^{1,\alpha}_{\bar{u}}(\Omega)$ e $f \in C^{\infty}(\Omega)$. Allora $u \in C^{2,\alpha}_{\bar{u}}(\Omega)$.*

Calcoliamo le derivate seconde di ciascun termine della formula di rappresentazione e ne studiamo l'hölderianità. Consideriamo, per semplicità, I. Si ha

$$\begin{aligned} X^2(z)I(\cdot,z) &- X^2(z_0)I(\cdot,z_0) \\ &= \int_\Omega X^2(z)\Gamma_z(\cdot;\zeta)(\bar{u}(\zeta) - P^1_z\bar{u}(\zeta))\varphi(\zeta)\partial_\eta u(\zeta)d\zeta \\ &- \int_\Omega X^2(z_0)\Gamma_{z_0}(z;\zeta)(\bar{u}(\zeta) - P^1_{z_0}\bar{u}(\zeta))\varphi(\zeta)\partial_\eta u(\zeta)d\zeta. \end{aligned}$$

La difficoltà principale si incontra nello stimare termini del tipo

$$X^2(z)\Gamma_z(\cdot;\zeta) - X^2(z_0)\Gamma_{z_0}(\cdot;\zeta) \tag{3.3}$$

su un insieme in cui ζ è lontano da z, z_0. La difficoltà della stima è legata al fatto che Γ_z è omogenea rispetto alle dilatazioni del gruppo di Lie G_z che, chiaramente, varia in dipendenza da z. Per poter lavorare su un unico gruppo di Lie, occorre pertanto rappresentare Γ_z in termini di Γ_H, soluzione fondamentale dell'operatore L_H definito in (2.2). Stimando in maniera classica Γ_H e utilizzando la dipendenza hölderiana di θ_z da z, si ottiene

$$|X^2(z)\Gamma_z(\cdot;\zeta) - X^2(z_0)\Gamma_{z_0}(\cdot;\zeta)| \leq C(d_{z_0}(z_0,z)d_{z_0}(z_0,\zeta)^{-Q-1} + d_{z_0}(z_0,z)^\alpha d_{z_0}(z_0,\zeta)^{-Q}),$$

dove il primo addendo al secondo membro è dovuto all'incremento di $X^2(z)\Gamma_z(\cdot;\zeta)$ rispetto alla sua prima variabile, mentre il secondo addendo tiene conto dell'hölderianità dei coefficienti dell'operatore.

Il passo successivo consiste nella prova della seguente

PROPOSIZIONE 3.3 *Sia $u \in C^{2,\alpha}_{\bar{u}}(\Omega)$ una soluzione classica di (1.5) con $\bar{u} \in C^{2,\alpha}_{\bar{u}}(\Omega)$ e $f \in C^{\infty}(\Omega)$. Allora $u \in C^{3,\alpha}_{\bar{u}}(\Omega)$.*

Per dimostrare l'esistenza delle derivate terze (X^3, $XY_{\bar{u}}$, $Y_{\bar{u}}X$) di u, utilizziamo una tecnica introdotta in [2] e perfezionata in [3]. Occorre prima introdurre qualche notazione.

DEFINIZIONE 3.4 *Poniamo*

$$D_1 = X \text{ e } D_2 = Y_{\bar{u}}.$$

Se $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, per ogni $z \in \Omega$ definiamo

$$\Delta_1 g(h)(z) = \frac{g(\exp(hD_1)(z)) - g(z)}{h},$$

e

$$\Delta_2 g(h)(z) = \frac{g\left(\exp(h^2D_2)(z)\right) - g(z)}{h^2}.$$

Se $n \geq 2$, definiamo per ricorrenza

$$\Delta^m_{i_1 \dots i_n} g(h)(z) = \Delta_{i_1}(\Delta^{m-i_1}_{i_2 \dots i_n} g(h))(h)(z),$$

dove $m = \sum_{r=1}^{n} i_r$.

Come in [3], Remark 4.2, si può provare il seguente risultato.

LEMMA 3.5 *Siano m e n come nella Definizione 3.4 e $g \in C^{m-1}_{\bar{u}}(\Omega)$. Se esiste*

$$\lim_{h \to 0} \Delta^m_{i_1 \dots i_n} g(h) = w$$

uniformemente sui compatti di Ω, allora esiste $D_{i_1} \dots D_{i_n} g = w$.

L'idea della dimostrazione della Proposizione 3.3 è la seguente. Prendiamo in esame, per esempio, l'esistenza di $X^3 u$. In base al Lemma 3.5, è sufficiente dimostrare l'esistenza di

$$\lim_{h \to 0} \Delta^3_{111} u(h)$$

uniformemente sui compatti di Ω. Utilizzando la formula di rappresentazione (3.1), studiamo separatamente il rapporto incrementale terzo dei termini I_1, I_2 e I. La stima più delicata è quella del termine I. Consideriamo una funzione cut-off $\chi \in C^\infty([0, +\infty[\,; [0,1])$ tale che $\chi(s) = 0$ per $0 \leq s \leq 1$ e $\chi(s) = 1$ per $s \geq 2$. Poniamo

$$I_\varepsilon(z, z_0) = \int_\Omega \Gamma_{z_0}(z; \zeta) \chi\left(\frac{d_{z_0}(z, \zeta)}{\varepsilon}\right) (\bar{u}(\zeta) - P^1_{z_0} \bar{u}(\zeta)) \varphi(\zeta) \partial_\eta u(\zeta) d\zeta.$$

Definiamo inoltre

$$I^{(111)}(z_0) = \int_\Omega X^3(z_0) \Gamma_{z_0}(\cdot; \zeta)(\bar{u}(\zeta) - P^1_{z_0} \bar{u}(\zeta)) \varphi(\zeta) \partial_\eta u(\zeta) d\zeta. \tag{3.4}$$

Osserviamo che l'integrale in (3.4) è convergente poichè

$$|X^3(z_0) \Gamma_{z_0}(\cdot; \zeta)(\bar{u}(\zeta) - P^1_{z_0} \bar{u}(\zeta))| \leq C d_{z_0}(z_0, \zeta)^{-Q+\alpha}.$$

Allora, per il teorema del valor medio, si ha

$$\begin{aligned} |\Delta^3_{111} I(\cdot, z_0)(h)(z_0) - I^{(111)}(z_0)| &\leq |\Delta^3_{111} I(\cdot, z_0)(h)(z_0) - \Delta^3_{111} I_{|h|}(\cdot, z_0)(h)(z_0)| \\ &\quad + |X^3(z_h) I_{|h|}(\cdot, z_0) - I^{(111)}(z_0)| \\ &\leq C|h|^\alpha, \end{aligned} \tag{3.5}$$

in base alle stime

$$\sup_{d_{z_0}(z_0, z) \leq \varepsilon} |I(z, z_0) - I_\varepsilon(z, z_0)| \leq C \varepsilon^{3+\alpha}, \tag{3.6}$$

e

$$\sup_{d_{z_0}(z_0,z)\leq\varepsilon} |X^3(z)I_\varepsilon(\cdot,z_0) - I^{(111)}(z_0)| \leq C\varepsilon^\alpha, \tag{3.7}$$

dove C è una costante positiva dipendente solo dalla funzione φ nella formula di rappresentazione e dalla norma L^∞ dei coefficienti dell'operatore sul supp(φ). Per ottenere le stime (3.6) e (3.7) si devono ancora una volta trattare, in maniera opportuna, termini del tipo (3.3).

Con tecniche analoghe si dimostra la seguente

PROPOSIZIONE 3.6 *Sia* $k = 3,4,5$. *Se* $u, \bar{u} \in C^{k,\alpha}_{\bar{u}}(\Omega)$ *e* $L_{\bar{u}}u \in C^{k-1,\alpha}_{\bar{u}}(\Omega)$ *allora* $u \in C^{k+1,\alpha}_{\bar{u}}(\Omega)$.

Infine, derivando direttamente l'equazione $L_{\bar{u}}u = f$, si dimostra la regolarità C^∞. Precisamente

PROPOSIZIONE 3.7 *Se* $u, \bar{u} \in C^{6,\alpha}_{\bar{u}}(\Omega)$ *e* $L_{\bar{u}}u \in C^\infty$ *in* Ω *allora* $u \in C^\infty(\Omega)$.

L'idea della prova è la seguente. Essendo $u_y \in C^{3,\alpha}_{\bar{u}}(\Omega)$ in senso euclideo e

$$L_{\bar{u}}(u_y) = f_y - \bar{u}_y u_y \in C^{2,\alpha}_{\bar{u}}(\Omega)$$

in base ai risultati precedenti, si ha

$$u_y \in C^{4,\alpha}_{\bar{u}}(\Omega).$$

In maniera analoga, derivando l'equazione rispetto agli altri campi, si prova che $u \in C^{7,\alpha}_{\bar{u}}(\Omega)$. Per induzione si ha la tesi.

Il Teorema 1.1 è conseguenza dei risultati di regolarità provati per l'operatore linearizzato.

Riferimenti bibliografici

[1] F. ANTONELLI, E. BARUCCI, M.E. MANCINO, *Backward-forward stochastic differential utility: existence, optimal consumption and equilibrium analysis*, preprint.

[2] G. CITTI, *C^∞ regularity of solutions of a quasilinear equation related to the Levi operator*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., Serie IV Vol.XXIII (1996), 483–529.

[3] G. CITTI, A. MONTANARI, *C^∞ regularity of solutions of an equation of Levi's type in $\mathbb{R}^{2n+1}$*, apparirà su Ann. Mat. Pura Appl.

[4] G. CITTI, A. PASCUCCI, S. POLIDORO, *Regularity of solutions of a nonlinear ultraparabolic equation of mathematical finance*, preprint.

[5] G.B. FOLLAND, *Subelliptic estimates and function on nilpotent Lie groups*, Ark. Mat., **13** (1975), 161–207.

[6] G.B. FOLLAND, E.M. STEIN, *Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group*, Comm. Pure Appl. Math., **20** (1974), 429–522.

[7] L. HÖRMANDER, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math., **119** (1967), 147–171.

[8] L.P. KUPTSOV, *Fundamental solution of certain degenerate second order parabolic equations*, Mat. Zametki, **31** (1982), 559–570 (English transl. Math. Notes, **31** (1982), 283–289).

[9] E. LANCONELLI, A. PASCUCCI, *On the fundamental solution for hypoelliptic second order partial differential operators with non-negative characteristic form*, apparirà su Ricerche di Matematica.

[10] E. LANCONELLI, S. POLIDORO, *On a class of hypoelliptic evolution operators*, Rend. Sem. Mat. Pol. Torino, **51.4** (1993), 137–171.

[11] A. LUNARDI, *Schauder estimates for a class of degenerate elliptic and parabolic operators with unbounded coefficients in $\mathbb{R}^n$*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., **24.1** (1997), 133–164.

[12] R. PESZEK, *PDE models for pricing stocks and options with memory feedback*, Applied Mathematical Finance, 2 (1995), 211–223.

[13] M. MANFREDINI, S. POLIDORO, *Interior regularity for weak solutions of ultra-parabolic equations in divergence form with discontinuous coefficients*, Bollettino U.M.I., (8) 1-B (1998), 651–675.

[14] L.P. ROTHSCHILD, E.M. STEIN, *Hypoelliptic differential operators on nilpotent groups*, Acta Math., **137** (1977), 247–320.

[15] E.M. STEIN, *Harmonic Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey (1993).

[16] N. TH. VAROPOULOS, L. SALOFF-COSTE, T. COULHON, *Analysis and geometry on groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge Tracts in Math. **100** Cambridge (1992).